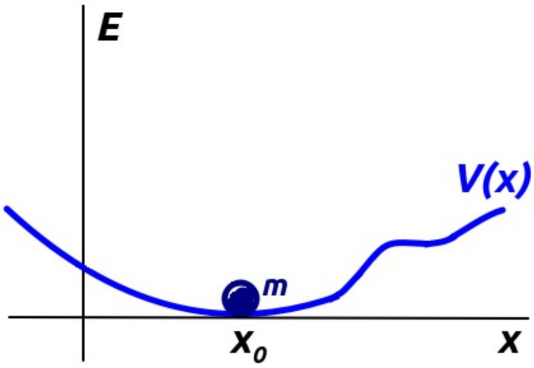
Drgania jednowymiarowe

Weźmy potencjał $V(x)$ o dowolnym kształcie, w punkcie $x = x_0$ mający dołek (minimum). Wyskalujmy potencjał – co zawsze wolno nam uczynić – tak, aby dołek miał energię równą zeru. Rozwińmy następnie potencjał w szereg Taylora wokół x_0 :



$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}\Big|_{x_0}(x - x_0) + \\ + \frac{1}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0}(x-x_0)^2 + \cdots$$

Pierwszy wyraz jest równy zeru. Skoro potencjał ma minimum w x_0 , to drugi wyraz (pochodna) jest też równy zeru. Wartość drugiej pochodnej w punkcie x_0 nazwijmy $k := d^2V / dx^2|_{x_0}$. Wprowadźmy także przesunięcie $z := x - x_0 ;\ dz = dx$. Wówczas, z bardzo dobrym przybliżeniem w pobliżu minimum, energia potencjalna równa jest

$$V(z) \approx \frac{kz^2}{2} .$$

W przypadku jednowymiarowym, $\vec{F} = -\nabla V(z) \equiv -\frac{dV}{dz}\hat{z}$. Pamiętając o tym, rozwińmy również i siłę (wartość siły) działającą na kuleczkę w dołku potencjału w szereg Maclaurina w zmiennej *z* (tj. wokół z = 0):

$$F(z) = F(0) + \frac{dF}{dz}\Big|_0 z + \frac{1}{2!}\frac{d^2F}{dz^2}\Big|_0 z^2 + \cdots$$

co jest tożsame z

$$F(z) = -\underbrace{\frac{dV}{dz}\Big|_0}_{=\ 0} - \underbrace{\frac{d^2V}{dz^2}\Big|_0}_{=\ k} z + \left\{ \begin{matrix} \textit{zaniedbujemy trzecią} \\ \textit{pochodną } V \textit{ i kolejne} \end{matrix} \right\} + \ldots \approx -k\,z ,$$

i co rozpoznajemy bez trudu jako równanie Newtona dla oscylatora harmonicznego z jego siłą zwrotną. W przybliżeniu lokalnego minimum (dowolnego) potencjału *V*, kuleczka będzie się kolebać (drgać) w dołku jak oscylator harmoniczny.

Zarys teorii oscylatora można znaleźć w artykułach *Siła oporu lepkiego* oraz *Oscylator wymuszony*. Tutaj wykonamy najprostsze operacje w celu rozwiązania równania Newtona dla naszej kuleczki:

$$m\,\frac{d^2 z}{d t^2} \;=\; -k\;z$$
$$m\ddot{z} \;+\; k\;z \;=\; 0$$
$$\ddot{z} \;+\; \omega^2\,z \;=\; 0\;\;.$$

Najoczywistszym kandydatem i prawidłowym podstawieniem jest $z = C_1\,e^{i\,\omega\,t} + C_2\,e^{-\,i\,\omega\,t}$. Tu jednak rozwiążmy równanie na skróty, „przez popatrzenie”, że jedynymi funkcjami rzeczywistymi, które odtwarzają same siebie z drugą pochodną i przeciwnym znakiem, są sinus i cosinus:

$$z \;=\; A_1\,\sin\omega t \;+\; A_2\cos\omega t\quad ,$$

gdzie A_1, A_2 zależą od warunków początkowych. Chcemy rozwiązania w postaci $z \;=\; A\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie A będzie stanowiło amplitudę naszego drgania, ω jego częstość kołową, a φ fazę początkową. Przeliczenie jest proste. Na mocy tożsamości trygonometrycznej,

$$z \;=\; A(\sin\omega t\;\cos\varphi \;+\; \sin\varphi\;\cos\omega t)$$

$$\Leftrightarrow\;\; A_1 = A\cos\varphi,\;\; A_2 = A\sin\varphi$$
$$\Leftrightarrow\;\; \tan\varphi = \frac{A_2}{A_1},\;\; A^2 = A_1^2 + A_2^2\;\;.$$

Prędkość w ruchu wynosi $\dot{z} \;=\; \omega\;A\;\cos(\omega t + \varphi)$. A skoro tak, to

$$E \;=\; \frac{m\;\dot{z}^2}{2} \;+\; \frac{k\;z^2}{2} \;=\; \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \omega^2\,z^2) \;+\; \frac{m}{2}\,(\omega^2\;A^2\,\cos^2(\omega t + \varphi) \;+\; \omega^2\;A^2\,\sin^2(\omega t + \varphi)) \;=\; \frac{m\,\omega^2 A^2}{2}\;.$$

Gdy zadane są warunki początkowe (zagadnienie Cauchy’ego): $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = v_0$, spośród całej rodziny oscylatorów zostaje dokonana selekcja tego ściśle odpowiadającego zadanym warunkom; ruch staje się ściśle określony co do amplitudy i fazy początkowej. Mianowicie,

$$z(0) \;=\; A\sin(0 + \varphi) \;=\; z_0,$$
$$\dot{z}(0) \;=\; \omega\;A\;\cos(0 + \varphi) \;=\; v_0\;,$$

skąd natychmiast otrzymujemy, że

$$\tan\varphi = \frac{\omega\, z_0}{v_0}\ ,$$
$$A^2 = z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\ .$$

Warunek $v_0 = 0$ pociąga za sobą, że początkowe wychylenie z_0 staje się amplitudą drgań (jest górną granicą wychyleń kuleczki). Jeśli $z_0 = 0$ i $v_0 = 0$, ruch oczywiście nie nastąpi (czemu odpowiada zerowa amplituda drgań).

Maksymalna prędkość jest wówczas, gdy cała energia jest energią kinetyczną, a zatem w położeniu równowagi (zerowy potencjał *V*), zaś maksymalne wychylenie – w miejscu wyzerowania się (zużycia całej) energii kinetycznej (maksymalny potencjał *V*), odpowiednio,

$$\frac{m\,\omega^2\,A^2}{2} = \frac{m\,v_m^2}{2} \Leftrightarrow v_{\substack{max\\min}} = \pm\omega\,A\ ,$$

co oczywiście stanowi amplitudę prędkości $\dot{z}(t)$, oraz

$$\frac{m\,\omega^2\,A^2}{2} = \frac{k\,z_m^2}{2} \Leftrightarrow z_{\substack{max\\min}} = \pm A\ ,$$

co jest amplitudą ruchu $z(t)$.

Oscylator zawieszony pionowo. Co zmieni się w parametrach ruchu, jeśli sprężynkę z ciężarkiem, który drgał na powierzchni gładkiego stołu, zawiesimy pionowo za przeciwny koniec sprężyny?

Dopóki nie doczepimy ciężarka, sprężyna będzie wisiała ze swoją długością swobodną l_0 . Po doczepieniu masy *m*, ulegnie wydłużeniu do długości *l*, w której siła zwrotna sprężyny zrównoważy ciężar *mg* naszej kuleczki: $k(l-l_0) = mg \Rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{k} = l_0 + \frac{g}{\omega^2}$. Długość *l* wyznacza nam nowe położenie równowagi oscylatora, bo w tym punkcie nie działa żadna wypadkowa siła – siły się równoważą. Jako, że pozostałe parametry fizyczne układu nie uległy zmianie (ani *k*, ani *m*), to parametry oscylatora będą identyczne, co poprzednio, w szczególności jego częstość kołowa ω, z tą jedyną różnicą, że drgać on będzie teraz wokół nowego położenia równowagi l, tj. o $\frac{mg}{k}$ niżej niż poprzednie (l_0) na osi z.

Ważka sprężyna. A co się stanie, jeśli uczynimy sprężynę bardziej realistyczną i nadamy jej równomiernie rozłożoną masę M? Duża litera służy odróżnieniu od masy kuleczki m, a nie sugerowaniu, że $M > m$ (wszystko jedno).

Sprężyna drgając z pewną intensywnością, będzie teraz dawała nietrywialny wkład do energii kinetycznej układu. Dodatek do energii potencjalnej wynikający z drobnych przemieszczeń (mała wielkość do kwadratu) kolejnych fragmentów sprężyny (np. pod wpływem siły grawitacji dla osiągnięcia nowego położenia równowagi) jest stosunkowo niewielki i może zostać pominięty; pozostaje nam dotychczasowa energia potencjalna sprężyny jako całości.

A zatem obecnie $E = V + E_{k,spr} + E_{k,m}$. Spodziewamy się stosownej modyfikacji ω oscylatora.

Niech v_m oznacza chwilową prędkość kuleczki m. Wiadomo, że prędkości elementów sprężyny są w tej samej chwili czasu różne i zmieniają się liniowo od 0 przy zaczepieniu do ściany (element nieruchomy), aż do v_m tuż przy kuleczce. Pozostaje nam więc scałkować przyczynki do energii kinetycznej całej sprężyny po kolejnych fragmentach wzdłuż jej (chwilowej) długości l.

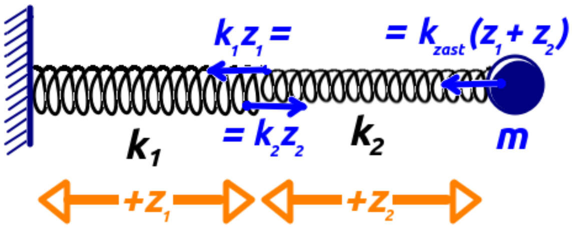
Na każdy element ds długości sprężynki przypada $dM = \rho_{lin}\, ds = \frac{M}{l}\, ds$ masy. Element dM ma chwilową prędkość $v_{dM} = \frac{s}{l}\, v_m$ (s zmienia się od s = 0 przy ścianie do s = l przy kuleczce; l jest wartością chwilową). Obliczenie następuje zatem tak, jak poniżej:

$$E_{k,spr} = \frac{1}{2}\int_0^M dM\, v_{dM}^2 = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M}{l}\, ds \left(\frac{s}{l}\, v_m\right)^2 = \frac{M\, v_m^2}{2\, l^3}\int_0^l s^2\, ds = \frac{M\, v_m^2}{2 l^3}\, \frac{l^3}{3} = \frac{M\, v_m^2}{6} \; .$$

Energia kinetyczna układu jest zatem równa $E_k = \frac{m\, v_m^2}{2} + \frac{1}{3}\frac{M\, v_m^2}{2} = \frac{(m + M/3)\, v_m^2}{2}$. Energia potencjalna nie zmieniła się. Sytuacja jest więc analogiczna, jak gdybyśmy zwiększyli masę kuleczki o $\frac{M}{3}$. Wobec czego, częstość oscylatora ulegnie zmianie o tę poprawkę masy i wyniesie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M/3}} \; .$$

Szeregowe połączenie dwóch sprężynek. Do sprężynki o sprężystości k_1 , zanim przyczepimy kuleczkę, doczepiamy drugą sprężynkę o sprężystości k_2 . Z samą sprężynką numer 1 układ drgałby z częstością $\sqrt{k_1 / m}$, zaś ze sprężynką numer 2: $\sqrt{k_2 / m}$.



Co możemy powiedzieć o połączonych dwóch sprężynkach? Z pewnością to, że:

i. W punkcie łączenia sprężyn siły się równoważą, bo zerowa masa, która tam się znajduje, musiałaby inaczej doznawać nieskończonego przyspieszenia. Sprężyny działają na siebie takimi samymi i przeciwnie skierowanymi siłami *F* – przy czym raz *F* pochodzi od odkształcenia o z_1 sprężyny k_1 , a raz od odkształcenia o z_2 sprężyny k_2 ;
ii. Sprężyna 2 przenosi na kuleczkę tę samą siłę *F*, której sama doznaje; według nas, siła *F* działająca na kuleczkę pochodzi od pewnego *k* zastępczego układu obu sprężynek;
iii. Oraz to, że suma odkształceń każdej z nich sumuje się do przemieszczenia kuleczki.

$$k_{zast}\left(z_{!} + z_2\right) = F = k_1 z_1 = k_2 z_2 ,$$

skąd

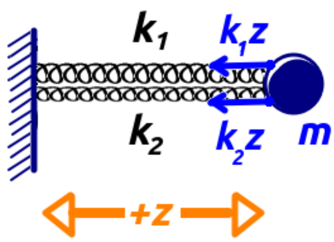
$$z_1 + z_2 = \frac{F}{k_{zast}} , \quad z_1 = \frac{F}{k_1} , \quad z_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k_{zast}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} .$$

W przypadku połączenia szeregowego sprężynek, *k* zastępcze jest średnią harmoniczną k_1 i k_2 . Wówczas również $\omega = \sqrt{\frac{k_{zast}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right) m}}$.

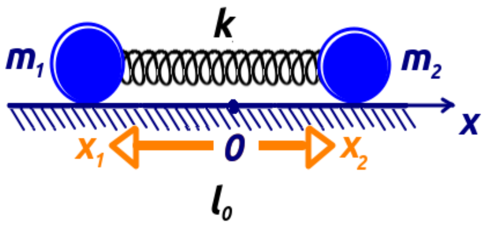
Połączenie równoległe dwóch sprężynek. Tym razem, geometria wymaga, żeby odkształcenia obu sprężynek były identyczne; jednakże siły od sprężynek dodają się do siebie, działając sumaryczną siłą zwrotną na kuleczkę. A zatem

$$k_{zast} z = k_1 z + k_2 z$$
$$\Leftrightarrow k_{zast} = k_1 + k_2 .$$



Tym razem, zastępczy współczynnik sprężystości k_{zast} jest sumą obu k sprężynek. Zaś $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

Dwa ciężarki na jednej sprężynce. Jaka będzie częstość drgań, jeśli dwie kulki na stole bez tarcia połączymy końcami tej samej sprężynki i rozciągniemy ją?



Z pewnością, sprężyna będzie działać taką samą siłą sprężystości na obie kulki, siłą zwrotną wynikającą z różnicy ich położeń x_1 i x_2 , o ile tylko $|x_2 - x_1| \neq l_0$. Układ jest izolowany, a zatem jego środek masy (CMS) znajdujący się pomiędzy dwoma kulkami musi pozostawać nieruchomy – powiedzmy że w punkcie zero na osi:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$
$$(x_1 < 0 ;\ x_2 > 0) \ .$$

Wypisując równanie Newtona np. dla pierwszej kuleczki, mamy

$$m_1 \ddot{x}_1 = k\,(x_2 - x_1 - l_0) = k\,[(-1 - \frac{m_1}{m_2})x_1 - l_0] = -k\,[(1 + \frac{m_1}{m_2})x_1 + l_0] \ .$$

Gdy wprowadzimy nową zmienną $z := (1 + \frac{m_1}{m_2})x_1 + l_0 \ ;\ \ dz = (1 + \frac{m_1}{m_2})\, dx_1$, to naturalnie

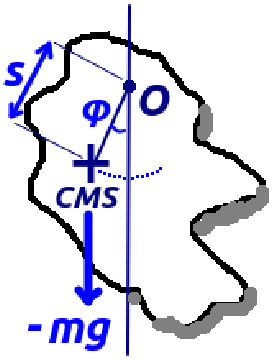
$$\frac{d}{dt}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{(1 + \frac{m_1}{m_2})}\frac{d}{dt}\frac{dz}{dt} \Leftrightarrow \ddot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{z}$$

i wówczas mamy

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{z} = -k\,z \ ,$$

a zatem oscylator harmoniczny z *masą zredukowaną* w zmiennej *z:* $\omega = \sqrt{k \,/\, (\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})}$ Ale z jest przeskalowanym (i przesuniętym o stałą wartość l_0) położeniem x_1 – tak samo jak x_2 . W zmiennych x_1 , x_2 zachodzą więc drgania z identyczną częstością co w z i adekwatnie przeskalowanymi amplitudami – oraz dodatkowymi, stałymi odstępami wzdłuż osi *x*, które jednak nie mają żadnego wpływu na częstość.

Wahadło fizyczne. Bryła sztywna przebita osią obrotu w punkcie *O*, innym niż jej środek masy (CMS), wykonuje wahania o niewielkiej amplitudzie pod wpływem momentu siły grawitacji.



Częstość wahań ściśle zależy od kształtu ciała, tj. od rozkładu masy względem CMS. Gdyby cała masa została skupiona w środku masy i zawieszona na nieważkim druciku, przyczepionym na drugim końcu do osi obrotu, mielibyśmy *wahadło matematyczne*.

Oś *O* oraz CMS łączy odcinek o stałej długości *s*. Składowa siły grawitacji w kierunku zmiany kąta *φ*, tj. w kierunku prostopadłym do odcinka *s*, wynosi $-mg\sin\varphi$ i jest zawsze skierowana w stronę zera *φ* (pionu). W przybliżeniu niewielkich kątów, $\sin\varphi \approx \varphi$ (kolejny wyraz rozwinięcia sinusa w szereg Maclaurina jest aż trzeciego stopnia).

A zatem, dynamiczne równanie Eulera przyjmuje postać

$$I\ddot{\varphi} = -s\cdot mg\sin\varphi \approx -s\cdot mg\,\varphi \quad ,$$

co stanowi równanie oscylatora harmonicznego. Łatwo odczytać, że jego częstość $\omega = \sqrt{\dfrac{mg\cdot s}{I}}$.

A skoro w przypadku wahadła matematycznego cała masa jest punktowa, tj. $I = ms^2$, to wówczas $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{s}}$.

Autor: Marek Pietrachowicz